



Article title: Chord Mathematical

Authors: Xiaohong LI[1]

Affiliations: author[1]

Orcid ids: 0000-0001-6461-1239[1]

Contact e-mail: lixiaohonggg@sina.cn

License information: This work has been published open access under Creative Commons Attribution License <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. Conditions, terms of use and publishing policy can be found at <https://www.scienceopen.com/>.

Preprint statement: This article is a preprint and has not been peer-reviewed, under consideration and submitted to ScienceOpen Preprints for open peer review.

Links to data: <https://www.smashwords.com/books/view/667328>

DOI: 10.14293/S2199-1006.1.SOR-.PPU0OME.v1

Preprint first posted online: 02 July 2019

Keywords: chord mathematics, chord geometry, decimal binary, discrete, symmetry, mirror image, theory of everything

1、律制与基础公式

律制是和弦语言分频、取值的数学模型，现代律制采用十二平均律*，简称：平均律。

平均律是一个公比为 1.05946 的等比数列：将一个八度平均分成十二等份，每等分称为半音，八度音指的是频率加倍（即二倍频率）。八度音的频率分为十二等分，即是分为十二个等比数列，也就是每个音的频率为前一个音的 2 的 12 次方根。

相邻两音（半音）公比： $2^{(1/12)} \approx 1.05946$ 递推公式： $V_n/V_{n-1}=Q$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

任意两音（音程）频率比： $V_n=V \cdot 1.05946^{(n-1)}$ 通项公式： $V_n=V_1 \cdot Q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

平均律数列是平均律取值范围集合，每个音符，色符都是其中一个项，元素。

设： $H=Q=2^{(1/12)} \approx 1.05946$, V =频率, s (Semitone)=半音程. $p=n-1$ =音程、量程值。

得到下面公式：

$S=HV$, (S =半音程, H =平均律常数, V =频率)。

$I=H^p \cdot V$ (H =平均律常数, I =音程, V =频率, $p=n-1$ =音程、量程值)。

$C=H^{p_1, p_2, p_3, p_4, p^*} \cdot V$ (C =和弦, 音阶, H =平均律常数, $p=n-1$ =音程、量程值)

上面公式组可表达任何和弦。

万物方程反序形式：

$$S=V/h$$

$$V_n=V/H^p$$

$$CS=V/H^{p_1, p_2, p_3, p^*}$$

上面公式可表达音程（量程），和弦，音阶。

用： $V_n=H^p \cdot V$ 可产生一个公比为：1.05947 的等比数列：

$$V_n=H^{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, *} \cdot V$$

用上式中 H 的幂（对数）作书写符，便可写出半音阶（音符不能记作 0，也可用： $p=n-1$ 转换为项数）。

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$$

用上面公式可写出音乐，绘画中的所有音阶，和弦。

常用音程的公式表达：

$$\text{小二度}=H^1 \cdot V$$

大二度= $H^2 \cdot V$

小三度= $H^3 \cdot V$

大三度= $H^4 \cdot V$

纯四度= $H^5 \cdot V$

增四度= $H^6 \cdot V$

纯五度= $H^7 \cdot V$

常用和弦、音阶的公式表达：

大三和弦= $H^0,4,7 \cdot V0$ (V=和弦根音频率)

小三和弦= $H^0,3,7 \cdot V0$

减七和弦= $H^0,3,6,9 \cdot V0$ (等比数列)

增三和弦= $H^0,4,8 \cdot V0$ (等比数列)

全音阶、全音和弦= $H^0,2,4,6,8,10,12 \cdot V0$ (等比数列)

大调七声音阶= $H^0,2,4,5,7,9,11,12 \cdot V0$ (V1=主音频率)

小调七声音阶= $H^0,2,3,5,7,8,10,12 \cdot V0$

大调爵士音阶= $H^0,3,4,7,11 \cdot V0$ (无调兼容形式)

小调爵士音阶= $H^0,3,7,11 \cdot V0$ (无调兼容形式)

平均律之外还有多种自然律，如：五度相生律，纯律等，不同律制存在微小音分差，这些差别来自取值方法，自然律用弦，管的比例取值，平均律涉及和弦语言的整体性：数学，和弦，调集团结构，中医经络学等，两者应为局部和整体的关系，后面章节会有更多内容涉及。

2、和弦数制

谱表中的每个定量单位：“音符”代表一个确定的物理量（频率），但是所代表的频率并不直接出现在乐谱中，因此，谱表只是一个代数形式。

音乐使用音阶计数，八度（倍频）进制，倍频各音具有相同的音名（字母），数字符号，唱名，在和弦、旋律中具有相对可替代性，这是音乐最重要的数学特征，八度进制来自“倍频”这个物理量，这是与离散频率分布逻辑有关的物理特征，这就需要更多的解释。

坐标，数字，字母记谱对照表：

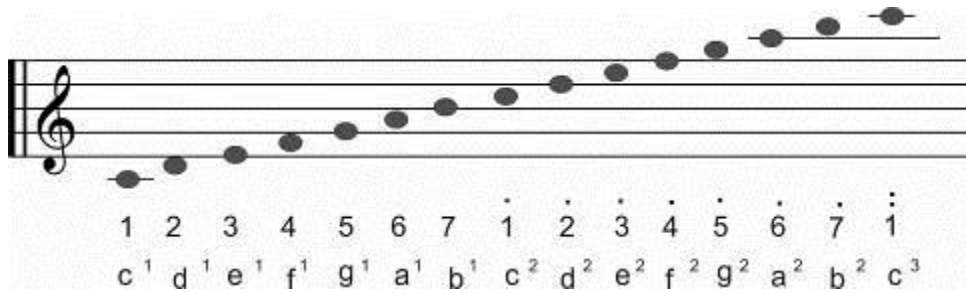


图 1-2、坐标，数字，字母记谱

八度音程的音名（字母），数字，唱名相同，不同数位仅用加点，数字上标区别，请比较所有八度（倍频）音程的记谱符号：字母，数字相同的即为八度音程。

用于计数的七声音阶 1-7 音中，1-2, 2-3, 4-5, 5-6, 6-7 为大二度音程 (=H².V)，3-4, 7-1 为小二度 (=H.V) 音程，数、量不统一，将所有为大二度音程的两数之间插入升、降号，转化为半音阶，相邻两数音程=H.V，统一了数、量，同时显示出音乐的十二进制特征。（*注 3）

1 #1 2 b3 3 4 #4 5 b6 6 b7 7 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 a b 10 11

下面为谱表，音名（字母），十二进制数字的完整对照表

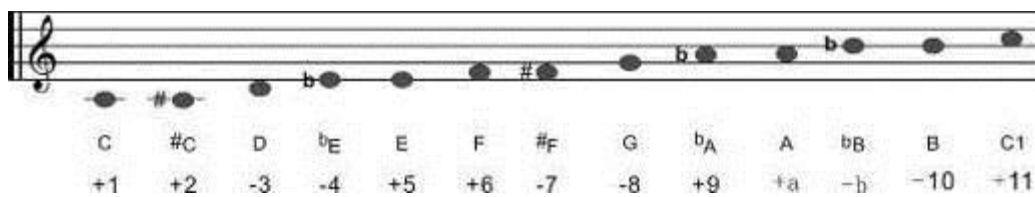


图 1-2.1、谱表，音名，十二进制数字对照表

按十二进制计数制，C 大调七声音阶可记为：+1、-3、+5、+6、-8、+a、-10、+11，统一了数、量关系。

也可采用坐标方式记录，下图为十二进制坐标中的半音阶。

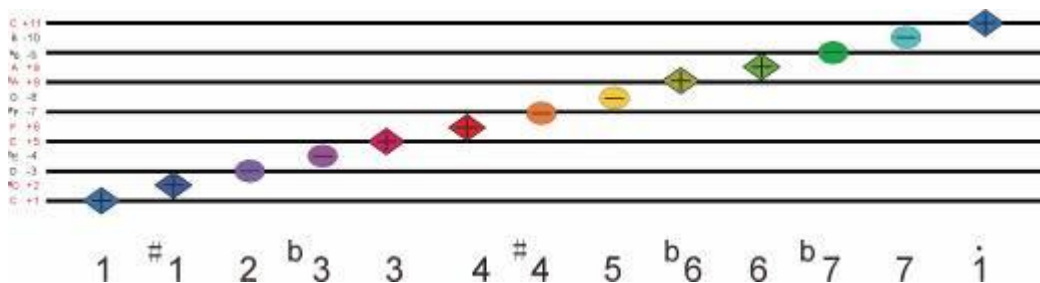


图 1-2.2、十二进制坐标，数字、音名标注于行首，下面是数字记谱（简谱）对照。

青，450-400，700-760

紫，430-390，770

用平均律公式： $V_s = H^s \cdot V_0$ （ $H=1.05946$ ， s =半音数， V =频率）计算得出平均律色阶：

红：410

朱红：434.3827

橙：460.1094922

橙黄：487.472106

黄：516.4620658

黄绿：547.1759951

绿：579.7164508

绿兰：614.1921343

青：650.7181042

青紫：691.5352454

紫：732.6607983

紫红：776.2320318

将平均律色阶各色记入下表，与其他平均律数据形成对应，关联。

number	+1	+2	-3	-4	+5	+6	-7	-8	+9	+a	-b	-10	+11
pitch name	C	#C	D	bE	E	F	#F	G	bA	A	bB	B	C1
color	blue	indigo	violet	purple/red	Red	red-orange	orange	yellow-orange	yellow	yellow-green	green	cyan	blue
经络	足太阳膀胱经	手太阳小肠经	手少阴心经	足太阴脾经	足阳明胃经	手阳明大肠经	手太阴肺经	足厥阴肝经	足少阳胆经	手少阴三焦经	手厥阴心包经	足少阴肾经	太阳膀胱经
Meridian	bladder meridian	small intestine meridian	heart meridian	spleen meridian	stomach meridian	large intestine meridian	lung meridian	liver meridian	gallbladder meridian	triple energizer meridian	pericardium meridian	kidney meridian	bladder meridian

图 1-3：十二平均律对应表。说明如下：

第一行、平均律的十二进制序数。

第二行、十二音名，半音阶。

第三行、十二色名，色阶。

第四行、十二平均律经络表，为经络学中的十二正经。

经络具有阴、阳属性，并会传递给同列的音、色、数字。

和弦数学的阴、阳属性在后面 1-5 节专门介绍。

4、十二进制坐标

将十二进制数字记谱转为坐标记谱，能显示和弦系统的数学特征，也兼顾了艺术家的读谱习惯。

十二进制坐标：两线间为大二度，相邻线、线间为小二度，对应数字见行首纵轴标注。

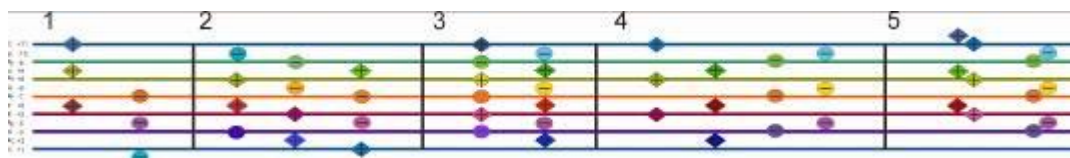


图 1-4.1、常见和弦的十二进制坐标记谱

上图说明：1、大、小三和弦，2、减七和弦，3、全音和弦，4、增三和弦（1-4），无调性和弦（5-6）。

1、十二进制数字、音名标注于行首，也可增加其它标注，满足不同学科需要。

2、正（阳）、负（阴）数表达：行首数轴的数字前标注+，-，直接在色（音）符上标注：+、-，菱形色符=正色符，椭圆色符=负色符。三种方式均可使用。

3、上下可自由加线扩充，也可将色符填充为相应色相，增强其可视性。

4、主和弦在形状上与其他音、色符相区别，提示调性。

坐标记谱不使用调号，升降号，这使他能方便的实现和弦绘画的色彩音阶，和弦记谱，也能方便的实现音乐爵士音阶，无调性系统的记谱。

数字记谱与坐标记谱均采用十二进制离散数学结构，在以后的使用中会根据需要逐渐修正，本书后面的示例均使用十二进制坐标记谱。

五线谱：五线谱采用七声音阶、八度进制计数制，可以表达任何频率值，但也有其局限性。

1、不能直接表现出和弦系统的十二进制数学结构。

2、所有和弦均含有镜像对称结构（反和弦，反音阶等），五线谱不能方便的表达这种结构。

仅就音乐而言，五线谱也存在缺陷，表现为两点：

a、五线谱基于七声音阶、八度进制计数制，但和弦逻辑系统中还有亚音阶和弦系统，如：爵士音阶，无调性完结等，用七声音阶计数制记谱、读谱均不方便，也掩盖了亚音阶系统的逻辑特征。

b、音乐的基础调关系为构成平行时空的平行调集团关系，五线谱用 C 大调作为定量坐标，掩盖了平行调集团关系，也不便观察调内逻辑结构。

矩阵、和弦语言也可用矩阵方式记谱，类似简谱。

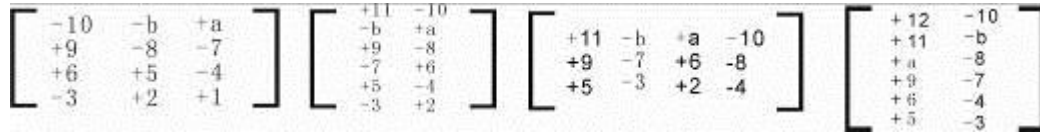


图 1-4.2、1、减七和弦，2、全音和弦，3、增三和弦，4、无调和弦

5、正、负（阴、阳）对称

和弦数学具有阴、阳属性，本书称为：数性（或数相），每个音符，色符均有继承自对应经络的相应数性，见：十二平均律对应表（图 1-3）。

下面的十二数中，含 6 阳 6 阴，按二阳、二阴交替、循环，可在数字前加 +（阳）、-（阴）号表示，也可沿用《易经》的 —（阳）、--（阴）符号。

音、色符 {+1 +2 -3 -4 +5 +6 -7 -8 +9 +a -b -10}

阳音、色符 {+1, +2, +5, +6, +9, +a}

阴音、色符 {-3, -4, -7, -8, -b, -10}

在十二进制坐标记谱中，+、-号可标注于色（音）符上，也可在色符上区别：椭圆色符：负（-），菱形色符：正（+）。

阴、阳与数字（音，色，经络）的关系是固定的，记熟后就不再需要标注。

和弦数学的阴、阳数性是和弦编码元素，是和弦语言的语法（数学、物理）特征，只有在和弦编码中才能理解这种元素的编码作用。

在下面观察中，我们可以看到：阴、阳（数性、数相）在和弦语言中的编码作用。

5.1、1 维和弦

下图为七声音阶大、小调的正副三和弦。

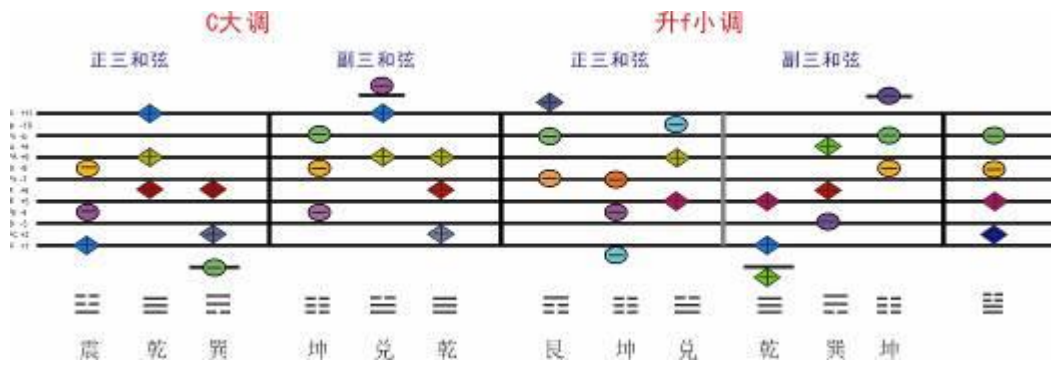


图 1-5.1, 七声音阶和弦表, 前四栏均为 1 维和弦。菱形=正色符 (+), 椭圆=负色符 (-)。

七声音阶主大调主和弦三色为正。{+1, +3, +5} (乾)

七声音阶主小调主和弦三色为负。{-1, -3, -5} (坤)

七声音阶大调的关系小调主和弦根色为负 {-1, +3, +5} (兑)

七声音阶小调的关系大调主和弦跟色为正 {+1, +3, -5} (巽)

(注: 1, 3, 5 是和弦根色, 三色, 五色, 从上到下排列)

七声音阶大调、小调主和弦三色为: 正, 负对称形式。

七声音阶正、副主和弦根色为: 正, 负对称形式。

七声音阶属、下属和弦根色为: 正, 负对称形式。

七声音阶三和弦系统中, 和弦的阴、阳数性表现为反相对称性。

下图为爵士音阶系统。

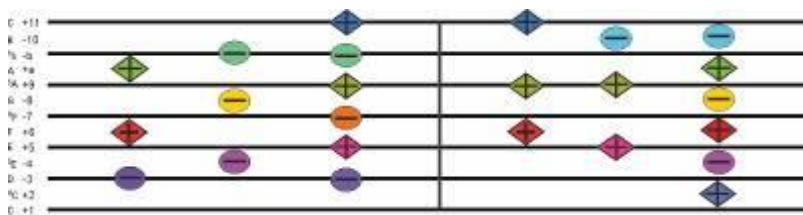


图 1-5.2、爵士音阶和弦表。每调均包括主、辅两个主和弦, 构成主、辅两调。

爵士音阶 (一栏) 大调主和弦: {+1, +3, -5}

爵士音阶 (一栏) 小调辅和弦: {-1, -3, -5},

爵士音阶 (二栏) 大调主和弦: {+1, +3, +5}

爵士音阶 (一栏) 小调辅和弦: {-1, +3, +5},

各调主, 辅和弦均保持正负对称。

组调规则: 和弦语言按“正负对称”原则进行组调。

主和弦根色为正色, 称: 正调, 主和弦根色为负, 称: 负调。

每个调组织均包括一阴正一负两调构成，包括以下形式：

天人对称：七声音阶两调根色为增四度关系，一正一负。

主副对称：七声音阶正、副主和弦两调根色为小三度关系，一正一负。

属调，下属调对称：七声音阶属和弦，下属和弦根色为大二度关系，一正一负。

表里对称：爵士音阶主，辅两调根色为小二度关系，一正一负。

5.2、M 维和弦

下图为 M 维和弦：减七和弦（1 栏），全音和弦（2 栏），增三和弦（3 栏），无调和弦（4 栏）。

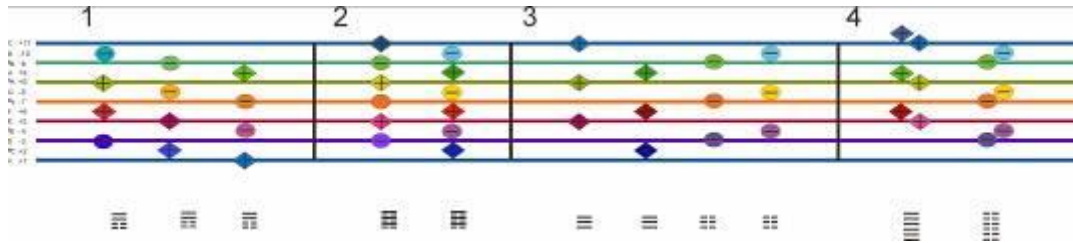


图 1-5.2、基本 M 维和弦表，菱形=正色符（+），椭圆=负色符（-）。

M 维和弦含调性、无调性两个完结方向，与色性（阴，阳）成分具有相关性，其规则为：

1、异性构成、和弦内含等量阳色、阴色，异性构成 M 维和弦有：

减七和弦 { +a,+b,-c,-d }

全音和弦 { +a,-b,+c,-d,+e,-f }

异性构成的 M 维和弦作调性完结

2、同性构成、和弦各色色性相同。

同性构成的 M 维性和弦有：

增三和弦 { +a,+b,+c } 或 { -a,-b,-c }。（乾；坤）

无调和弦 { +a,+b,+c,+e,+f,+g } 或 { -a,-b,-c,-e,-f,-g }。（乾；坤）

同性构成的 M 维和弦作无调性完结。

在 M 维和弦中，和弦的阴、阳数性表现为调性，无调性差异。

一般性原则：阳色具有后退感，阴色具有前进感，在 1 维、M 维和弦，不同音阶系统均有表现，这一差异在空间组织中有着重要作用。

卦象能归纳和弦色性元素，可看作色性的集合，但不能区别 1 维和弦与 M 维和弦，两者的区别仍然很大，具有局限性。

从数性元素观察中得到的印象是：《易经》疑似是来自中医经络学中的数性元素，卦象是数性的各种集合符号。

数性不是数学中的正、负数，而是与和弦空间（和弦几何）有关的物理量，在本书后面的和弦空间构成中我们会看到它们的空间几何意义。

6、镜像对称

和弦语言中，所有“调”都有其“反调”（包括调内结构：和弦，和弦关系，音阶，旋律等），称为：“镜像对称”。

如：C 大三和弦正序为：1、5、8（C,E,G），根音、色在谱表下方，序数由小到大排列，反序为：11, 9、6（C,bA,F），根音、色在谱表上方，序数由大到小排列，数序相反，结构相同，三个音、色具有相同的离散频率比：1-2 为大三度（ $=H^4.V$ ），2-3 为小三度（ $=H^3.V$ ），1-3 为纯五度（ $=H^7.V$ ），两个和弦互为反和弦，计算上互为逆运算。

C 大三和弦（正序） $=H^{0,4,7}.C$

C 大三和弦（反序镜像） $=C/H^{0,4,7}$

镜像对称涉及到和弦语言的所有逻辑关系：调，和弦，和弦关系，音阶，旋律，升降等，需要熟悉和声学，才能完全理解。

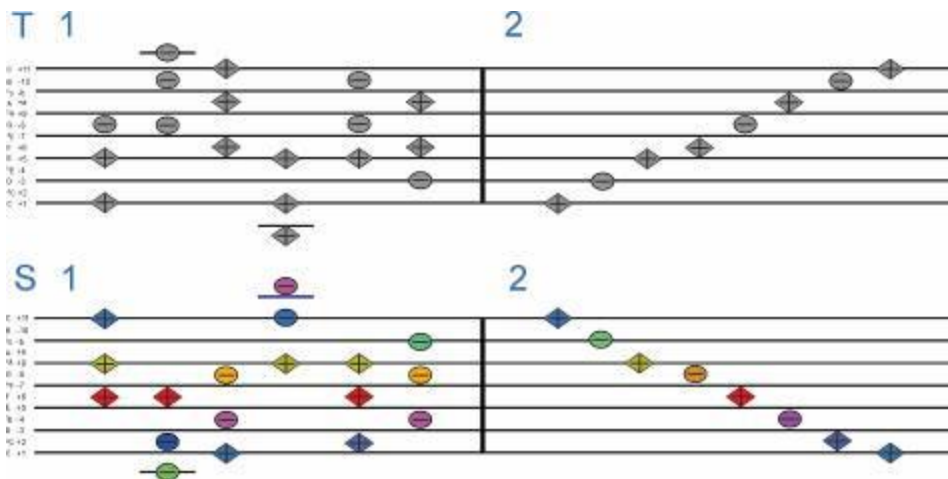


图 1-6.1、1+M 维时空镜像坐标，七声音阶 C 大调正副三和弦

上面两表互为反调，反和弦，反音阶，上表为正序形式，下表为反序形式。下表看似上表在水中的镜像。

上表、C大调正、副三和弦，C大调七声音阶，正序，用灰色表色。下表、C大调正、副三和弦，C大调七声音阶，反序，用彩色表示，上下两表的调，和弦，音阶互为镜像。

上表的横轴为时间，纵轴位频率，下表只有频率轴，没有时间轴。

正序取值公式： $V_p = H^{\hat{p}} \cdot V$ ($H=1.05946$, n =音程值, V =频率)

反序取值公式： $V_p = V / H^{\hat{p}}$

图 1-6.1、t1: C大三和弦 (正序) = $H^{0,4,7} \cdot C$

图 1-6.1、s1: C大三和弦 (反序) = $C / H^{0,4,7}$

图 1-6.1、t2: C大调七声音阶 (正序) = $H^{0,2,4,5,7,9,11,12} \cdot C$ (C =主音频率)

图 1-6.1、s2: C大调七声音阶 (反序) = $C / H^{0,2,4,5,7,9,11,12}$

正序与反序互为逆运算，指数不变，则可产生正、反和弦。

正、反升降音、色：音乐中的临时升降半音均为正序，由小到大为升 (#)，由大到小为降 (b)，其反序镜像中的临时升降半音相反：由大到小为升 (#)，由小到大为降 (b)。

正序和弦用于时间（如：音乐）表达，反序和弦用于空间（如：绘画）表达，时间与空间的和弦编码互为镜像对称形式。

镜像对称涉及时、空关系及自然法则密，在后面“15、和弦时空”章节有更多的介绍。

7、音程、色程

音程与色程（量程）是两音，两色之间频率比值，在和弦构成中会大量涉及，涉及术语，数制、正，反序转换等。

音乐中常用半音（半音频率比= $H=1.05964$ ）来计算各种常见音程。

距离 0 个半音：纯一度 (DO-DO、MI-MI)

距离 1 个半音：小二度 (MI-FA)、增一度 (DO-#DO)

距离 2 个半音：大二度 (DO-RE)、减三度 (#RE-FA)

距离 3 个半音：小三度、增二度

距离 4 个半音：大三度、减四度

距离 5 个半音：纯四度

距离 6 个半音：增四度、减五度

距离 7 个半音：纯五度

距离 8 个半音：小六度、增五度

距离 9 个半音：大六度

距离 10 个半音：小七度

距离 11 个半音：大七度

距离 12 个半音：纯八度

也可用下面数学公式可表达音程频率比值：

$V_s = H^s \cdot V_0$ ：任意音程频率比（ V_p =音程频率比 s =半音数， V_0 =根音）。

小二度= $H^1 \cdot V_0$

大二度= $H^2 \cdot V_0$

小三度= $H^3 \cdot V_0$

大三度= $H^4 \cdot V_0$

纯四度= $H^5 \cdot V_0$

增四度= $H^6 \cdot V_0$

纯五度= $H^7 \cdot V_0$

小六度= $H^8 \cdot V_0$

大六度= $H^9 \cdot V_0$

小七度= $H^{10} \cdot V_0$

大七度= $H^{11} \cdot V_0$

将上面色程写入谱表，下方音为根音，上方音为冠音。

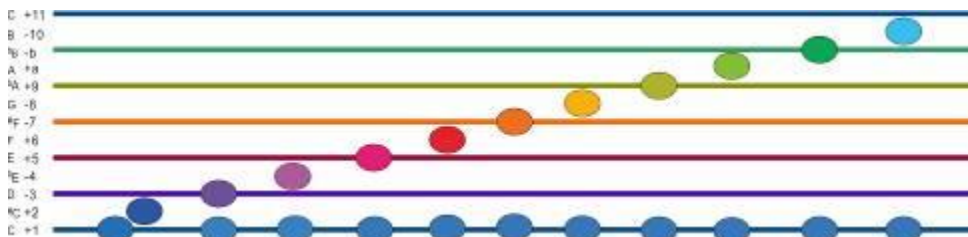


图 1-7.1：坐标记谱上的色程表（正序、升序）

反序形式为正序方式的逆运算，指数不变。

$V_s = V_0 / H^s$ （ V_p =音程频率比 s =半音数， V_0 =根音）

小二度= V_0 / H^1

大二度= V_0 / H^2

小三度= V_0 / H^3

大三度= V_0 / H^4

纯四度= V_0 / H^5

增四度= V_0/H^6

纯五度= V_0/H^7

小六度= V_0/H^8

大六度= V_0/H^9

小七度= V_0/H^{10}

大七度= V_0/H^{11} 大七度

注：数制转换：公式中 H 的两个指数是十二进制频率比，后面文字标注是基于音阶计数制的频率比。

将上面反序色程写入谱表，上方音为根音，下方音为冠音。

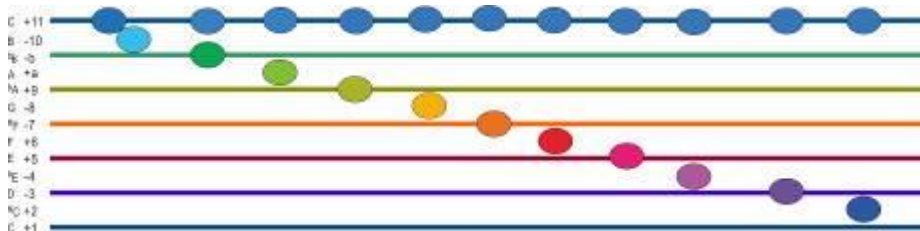


图 1-7.2：坐标记谱上的色程表（反序、降序），

7.2、等音、色程

和弦数学中，倍频具有可替代性，下面音、色程可看作：等音、色程。

$V_p=H^7 \cdot V_0$ 纯五度= $V_p=V_0/H^5$ 纯四度

$V_p=H^4 \cdot V_0$ 大三度= $V_p=H^8 \cdot V_0$ 小六度

$V_p=H^3 \cdot V_0$ 小三度= $V_p=H^9 \cdot V_0$ 大六度

$V_p=H^2 \cdot V_0$ 大二度= $V_p=H^{10} \cdot V_0$ 小七度

$V_p=H^1 \cdot V_0$ 小二度= $V_p=H^{11} \cdot V_0$ 大七度

注释与参考

1、十二平均律、明朝中叶，皇族世子朱载堉发明以珠算开方的办法，求得律制上的等比数列，具体说来就是：用发音体的长度计算音高，假定黄钟正律为 1 尺，求出低八度的音高弦长为 2 尺，然后将 2 开 12 次方得频率公比数 1.059463094，该公比自乘 12 次即得十二律中各律音高，且黄钟正好还原。用这种方法第一次解决了十二律自由旋宫转调的千古难题。

在朱载堉发表十二平均律理论之后 52 年，Pere Marin Mersenne 在（1636 年）其所著《谐声通论》中发表相似的理论。

2、1900 年普朗克获得一个和实验结果一致的纯粹经验公式，1901 年他提出了能量量子化假设：辐射中心是带电的线性谐振子，它能够同周围的电磁场交换能量，谐振子的能量不连续，是一个量子能量的整数倍：

$$\epsilon_n = nh\nu \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

3、十二进制是数学中一种以 12 为底数的记数系统，通常使用数字 0~9 以及字母 A、B（或 X、E）来表示。其中，A（或 X）即数字 10，B（或 E）即数字 11。

4、《黄帝内经：灵枢、经脉第十》将阴、阳划分为：手、足三阴、三阳：

手三阴经：手太阴肺经、手少阴心经、手厥阴心包络经；

手三阳经：手阳明大肠经、手太阳小肠经、手少阳三焦经；

足三阳经：足阳明胃经、足太阳膀胱经、足少阳胆经；

足三阴经：足太阴脾经、足少阴肾经、足厥阴肝经。

该表在中医理论中具有重要地位。

5、十二经脉的表里关系、手足三阴、三阳十二经脉，通过经别和别络相互沟通，组成六对，“表里相合”关系，即“足太阳与少阴为表里，少阳与厥阴为表里，阳明与太阴为表里，是足之阴阳也。手太阳与少阴为表里，少阳与心主（手厥阴心包经）为表里，阳明与太阴为表里，是手之阴阳也。”

大肠与肺相表里

小肠与心相表里

胃与脾相表里

胆与肝相表里

膀胱与肾相表里

三焦与心包相表里

参考文献

基本乐理通用教材 作者：李重光，高等教育出版社，2004 年 09 月，ISBN：9787040155334

音乐的构成（该丘斯音乐理论丛书之一）作者：（美）柏西·该丘斯，缪天瑞编译，人民音乐出版社-1964.

和声学（该丘斯音乐理论丛书之三）作者:（美）柏西.该丘斯（P.Goetschius）缪天瑞 编译，人民音乐出版社- 1962-07.

律学基础教程、作者：阎林红，中央音乐学院出版社 ISBN： 9787810964654

色彩艺术、作者：约翰内斯.伊顿，译者：杜定宇，世界图书北京出版公司，1999年06月。

中医基础理论（TCM Basic Sciences）、作者 张安玲，徐胤聪，同济大学出版社 2009-7-1

经络腧穴学，沈雪勇编著，中国中医药出版社 2008年1月1日，ISBN： 9787801564412

经络学(规划教材)、作者:李鼎，上海科学技术出版社、1995年06月

黄帝内经、作者：佚名，中医古籍出版社，2003-11.